Terminale 1 – Spécialité – Calculatrice autorisée

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
        U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
   Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\,634$	29 654
$-66\,341$	296 539
$-729\,752$	3 261 928
$-8\,757\,025$	39 143 135
$-113\,841\,326$	508 860 754

   Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $e = e^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;\,1]$ par $F(x) = (-1-x)e^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0;\,1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;\,1]$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2.
4. a. Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;\,1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n \mathrm{e}$.
   b. Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   d. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par : $1!=1$
$2! = 2 \times 1$
et si $n \geqslant 3$: $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$
On a ainsi par exemple
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2!$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3!$
$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7!$
Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

   On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.
   a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.
   b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1\,;\,-1\,;\,1)$ et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t-1\\ y &=& -3t+2\\ z &=& t\end{array}\right. \text{ où } t\in\mathbb{R} \qquad \mathcal{D}'\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t'\\ y &=& t'+2\\ z &=& 3t'-2\end{array}\right. \text{ où } t'\in\mathbb{R}$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite $\mathcal{D}$ ».
Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point O a pour équation : $2x-3y+z=0$ ».
Proposition 3 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales ».
Proposition 4 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires ».
Proposition 5 : « La distance du point A au plan d'équation $2x-3y+z=0$ est $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ ».

Exercice 3 (Les questions sont indépendantes)

Question 1

On joue au loto en cochant dans une grille 6 numéros parmi les numéros $1, 2, \ldots, 49$. On place ensuite 49 boules numérotées de 1 à 49 dans une urne et on en extrait 6. On obtient ainsi les numéros gagnants.

1) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien de tirages nous fournissent exactement 1 numéro gagnant ?
3) Combien de tirages nous fournissent exactement 2, 3, 4, 5, 6 numéros gagnants ?

Question 2

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot ÉLÈVE ? Même question en effaçant les accents ?
Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHÉMATIQUES ?

(Anagramme : Mot formé en changeant de place les lettres d'un autre mot. Par exemple PAS et APS)

Question 3

On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Question 4

Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

Question 5

On donne n droites du plan. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourantes. Déterminer le nombre $P(n)$ de régions délimitées par ces droites.